すごろくの考察

神戸市立六甲アイランド高等学校　総合科学系　１７期１４班

要旨

さいころを何回振ればすごろくの上がりに到達するかを検証することを目的とし、計算によって期待値を求めた。N マスのすごろくを上がるためのサイコロを振る回数の期待値は折り返しの有無によって明らかに違い、En の漸化式は等差数列に近い形になるということがわかった。

方法

数学の確率に興味を持ち、さいころを何回振ればすごろくの上がりに到達するかを検証した。設定した条件は以下の通りである。

(A)振り出し以外のマス目の数＝n

(B)一本道で分岐がない

(C)「１マス戻る」等の特殊なマスはなし

(D)最後ピッタリでなければ上がりにならず折返し

今回、条件(D)の有無の違いを検証した。計算方法は以下の通りである。

(1) マス目の数 n を決める

(2)1 回で上がる確率、2 回で上がる確率…をそれぞれ計算する

(3) さいころを平均何回振れば上がるか(期待値 E(n))を計算する

(4) E(n)を n で表す

折返しなしの場合

■ n=1 の場合

さいころを 1 回振れば必ず上がる

∴E(1) ＝ 1

振り出し	上がり

■ n=2 の場合

1 回で上がる場合＝2 以上の目が出るとき

その確率は、5/6

2 回で上がる場合＝1 回目に 1 の目が出るとき

その確率は、1/6

振り出し		上がり

∴E(2)＝ 1×5/6+2×1/6 ＝ 7/6

この計算を n を増やして繰り返し、以下の法則を導いた。

■ 6 分の 7 法則（1≦n≦7 のとき）

$$E(n)=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} \quad (1 \leqq n \leqq 7)$$

ただし n≧8 のときは成り立たないことを確認した。

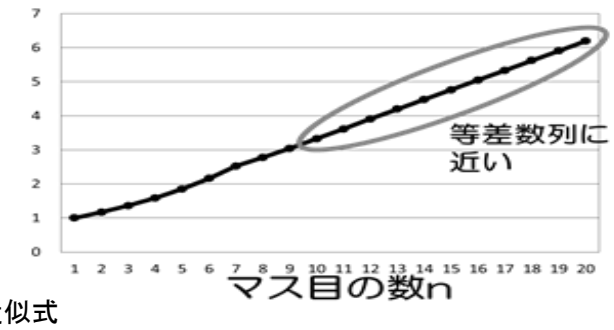
■ E(n)の漸化式

E(n)＝1＋{E(n−1)＋E(n−2)＋E(n−3)＋E(n−4)＋E(n−5)＋E(n−6)}×1/6

この漸化式の求め方は次の通りである。最初の 1 は、さいころを振る 1 回目の回数。1 の目が出れば残り(n−1)マスなのでさいころを振る回数も E(n−1)回。以下同様に、6 の目が出れば E(n−6)回。1 回目に各目が出る確率は 1/6 なので、それぞれに 1/6 をかけて加えた。

■ E(n)の折れ線グラフ

Excel を使用して漸化式から E(n)の値を計算し、グラフを作成した。



■ E(n)の近似式

n が十分大きいとき、E(n)は等差数列に近似できる。E(99)と E(100)の値から、初項と公差を求め、以下の近似式を導いた。

$$E(n)\text{の近似式}=\frac{2}{7}n+\frac{10}{21}$$

折返しありの場合

1≦n≦5 のときは成り立たない。

■ n=6 の場合

1 回の確率＝1/6

2 回の確率＝5/6×1/6

3 回の確率＝$(5/6)^2$×1/6

・・・

k 回の確率＝$(5/6)^{k-1}$×1/6

無限等比級数を使って計算し、期待値 $E_0(6)$＝6

■ $E_0(n)$の漸化式

同様に考えて、$E_0(n)$ (7≦n≦11)の値を計算すると次のようになる。

$E_0(7)$	$E_0(8)$	$E_0(9)$	$E_0(10)$	$E_0(11)$
7	43/6	265/36	1639/216	10177/1296

$E_0(n)$の漸化式は折返しなしの場合と同様にして、

$E_0(n)$＝1＋{$E_0(n-1)$＋$E_0(n-2)$＋$E_0(n-3)$＋$E_0(n-4)$＋$E_0(n-5)$＋$E_0(n-6)$}×1/6

■ $E_0(n)$の近似式

n が十分大きいとき、$E_0(n)$は等差数列に近似できる。$E_0(99)$と $E_0(100)$の値から、初項と公差を求め、以下の近似式を導いた。

$$E_0(n)\text{の近似式}=\frac{2}{7}n+\frac{100}{21}$$

考察

■ 近似式の公差

2/7×n の部分は、n÷3.5 と等しく、さいころ 1 回振ったとき進めるマス数の期待値 3.5 で n を割った値である。

■ 折返し有無による差異

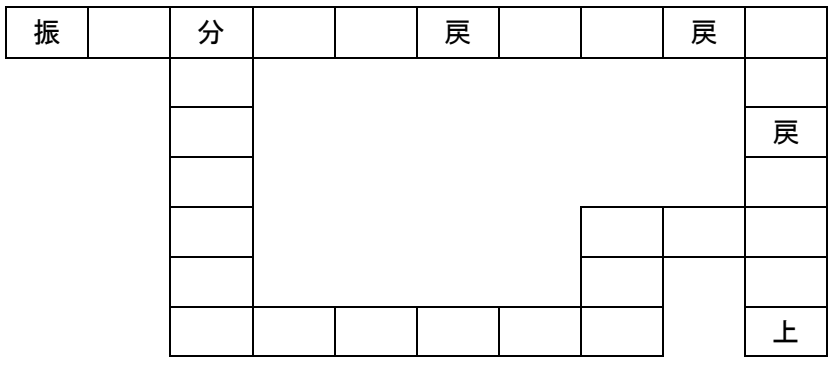
上がりの折返しがあると、期待値は 4 程度増加する。

	折返し無し	折返し有り
近似式	$\frac{2}{7}n+\frac{10}{21}$	$\frac{2}{7}n+\frac{100}{21}$
n=100	約29回	約33回

今後の予定

■ 「1 マス戻る」の効果の検証

「1 マス戻る」のマスが 1 つある場合、さいころを平均何回振れば上がるかの期待値がどのように変化するかを計算により求める。複数ある場合についても検証する。

■ 分岐がある場合の戦略

下図のように選択可能な分岐がある場合、どちらが有利かを判断するための戦略を提案する。