ハノイの塔と数列

六甲アイランド高等学校　総合科学系21期1班

Introduction

ハノイの塔とは
世界的に知られている数学のパズル。
3本の棒と穴の開いた複数の円盤で行う。
円盤はすべて異なる大きさで、3本のうちの
1本に下から大きい順で積んだ状態から
スタートする。円盤は1手に1枚しか動かせない。
また小さな円盤の上に大きな円盤を置くことは
できない。この条件下で残りの2本のどちらか
1本に再び下から大きい順で積んでいく。
円盤の枚数をｎとすると、最小手順は
$2^n - 1$（回）と既に発見されている。

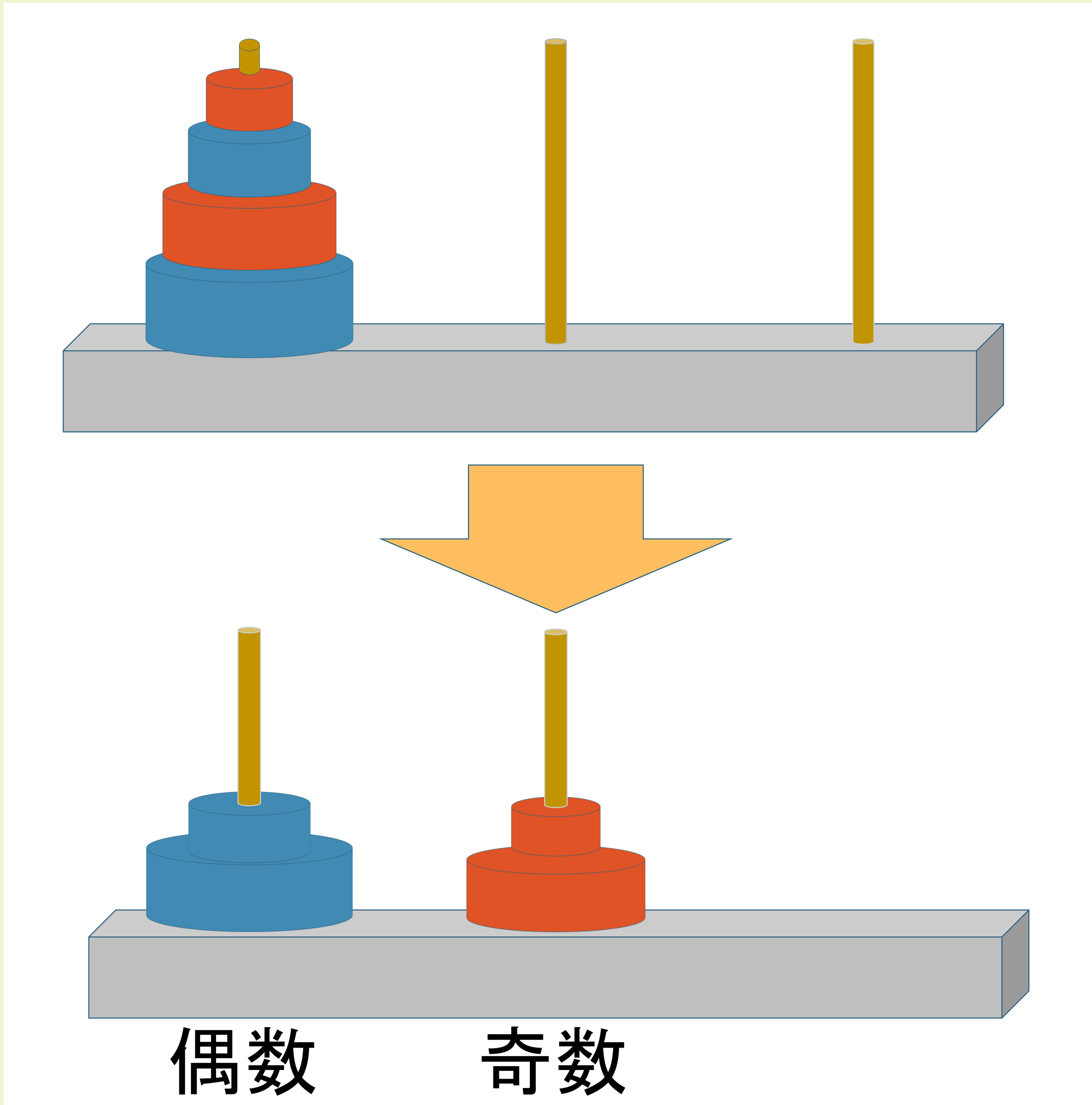
我々はこのハノイの塔を用いてさらなる条件を
加えて研究をする。その条件とは、
上から偶数番目の円盤と奇数番目の円盤を
残りの2本の棒に分別するというものだ。

Hypothesis

新しい条件を付け加えることにより
最終手順の新しい規則性を見つけ出せる

Method

① 実際にｎ枚で動かしてみる
（ｎ＝１，２，３,,,１８まで）
② ①から規則性を見つけ出す
③ 数式化する
④ 一般化を目指す



Result

実際に動かしてみて得られた最小手順から
以下の3種類のグループに結果を分けることができた。

n=(1, 2), (7, 8), (13, 14) =(6n−5, 6n−4) ∗1
n=(3, 4), (9, 10), (15, 16)=(6n−3, 6n−2) ∗2
n=(5, 6), (11, 12), (17, 18)=(6n−1, 6n) ∗3

最小手順の数は次の通りである。

$*1=2^{6n-6}+2^{6n-7}+2^{6n-9}+2^{6n-10}+\cdots+2^3+2^2+2^0$

$*2=2^{6n-4}+2^{6n-5}+2^{6n-7}+2^{6n-8}+\cdots+2^5+2^4+2^2+2^1$

$*3=2^{6n-2}+2^{6n-3}+2^{6n-5}+2^{6n-6}+\cdots+2^4+2^3+2^1+2^0$

等比数列の和の公式を用いて

$*1={}^{1}/_{7}(12\cdot 8^{2n-2}-5)$

$*2={}^{6}/_{7}(8^{2n-1}-1)$

$*3={}^{3}/_{7}(8^{2n}-1)$

Conclusion

まとめとして結果のように最小の手順をグループ分けすると、規則性を見出すことができた。
このことから円盤を偶数と奇数に分ける最小の手順には、なんらかの
法則があると考えられます。

References

www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/FreeRsearch/TowerHanoi.pdf