

ハノイの塔の新しいルールを考えました

～数列を用いたハノイの塔の発展～

六甲アイランド高等学校

総合科学系21期 2班



図1 ハノイの塔

Introduction

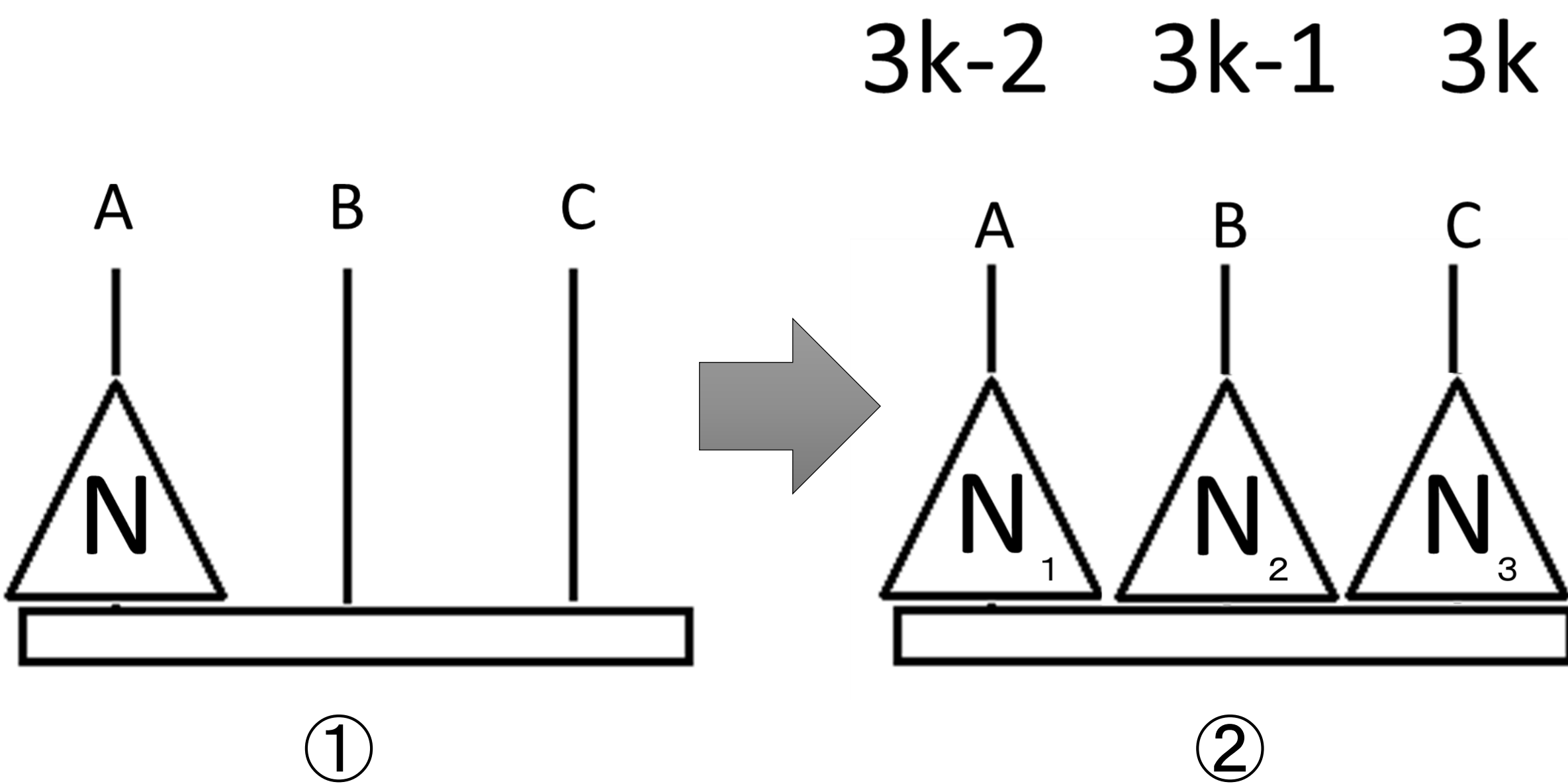
- ・ハノイの塔とは有名な古典的パズルの一つ。1833年フランスのE.リュカが考案。(実物は図1を参考。)
- ・三本の柱のうちの一本に積まれた大きさの違う何枚かの円盤を別の柱に元の積まれた順序を変えずに移し替える問題である。
- ・人工知能における推論や問題解決の例題として用いられる。
- ・移し替え終える最小の手数を求める式はすでに $Q(n)=2^n-1$ と、導き出されている。
 - ※ 上記の式は n 枚を全て移動させるのに必要な最小手数を $Q(n)$ としている。
- ・私たちは従来のハノイの塔のルールに、新たなルールを追加しても、最小手数を一般化できると考えた。

Method

実施材料) ハノイの塔の実物 (HANAYAMA かつのう ハノイの塔)

実験方法) 従来のルール(Introduction参考)に次のルールを追加する。

- ① 左から柱をA B C とおき、柱Aに円盤の大きい順に N 枚積み上げる。
 - ② 柱Aに $3k-2$ 枚目、柱Bに $3k-1$ 枚目、柱Cに $3k$ 枚目の円盤が来るように並び替える。
 - ③ ①②のルールのもと、並び替え終える最小手数を記録し、規則性を見つける。
- ※ N_1 N_2 N_3 は N を①②のルールで並び替えた後の枚数である。



Result

N 枚を移動させるのに必要な最小手数を $Q(N)$ とすると、結果より、

$Q(1)=0$
 $Q(2)=3=(2^0+2^1)$
 $Q(3)=5=(2^0+2^2)$
 $Q(4)=5=(2^0+2^2)$
 $Q(5)=31=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)$
 $Q(6)=42=(2^1+2^3+2^5)$
 $Q(7)=42=(2^1+2^3+2^5)$
 $Q(8)=255=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7)$
 $Q(9)=341=(2^0+2^2+2^4+2^6+2^8)$
・
・
・
 $Q(19)=174762=(2^1+2^3+2^5+2^7+2^9+2^{11}+2^{13}+2^{15}+2^{17})$ となった。
* $Q(10) \sim Q(18)$ の最小手数も求めることができています。

左の式より、
枚数が $3n-1$ ($n=1, 2, 3, 4, 5 \dots$) の時、最小手数は、
 $Q(2)=3=(2^0+2^1)$
 $Q(5)=31=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)$
 $Q(8)=255=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7)$
・
・
・
 $Q(14)=16383=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}+2^{13})$

 $Q(3n-1)=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+\dots+2^{3n-4}+2^{3n-3}+2^{3n-2}$
と予想できる。
また、等比数列の和の公式を用いて一般化すると

$$Q(3n-1)=\sum_{k=1}^{3n-1} 2^{k-1}$$
$$= 2^{3n-1}-1 \quad (n=1, 2, 3 \dots)$$

Conclusion

- ・ルールを一部変更したハノイの塔を解くことで最小手数を一般化できた。
- ・それにより、今回の研究とはまた違った条件でも一般化できる可能性がある。
- ・「ハノイの塔」と「巡回セールスマン問題」は類似点が多く、今回の研究を巡回セールスマン問題に応用することができる可能性がある。
- ・巡回セールスマン問題以外にも組み合わせ最適化問題に応用できる可能性がある。

※巡回セールスマン問題とは、
「セールスマンがいくつかの都市を1度ずつすべて訪問して出発点に戻ってくるときに、移動距離が最小になる経路」を求める問題である。

References

「引用元 現代カタカナ辞典」
「ハノイの塔のルールと最短手数」〈<https://mathtrain.jp/hanoinotou>〉
「ハノイの塔 かつのうパズルシリーズ」〈http://torito.jp/shopping/item.cgi?_katsunou-towerofhanoi〉
「巡回セールスマン問題 株式会社NTT数理システム」
〈<https://www.msi.co.jp/nuopt/docs/v19/examples/html/02-12-00.html>〉